2009 년 7 월 15 일, 수요일

문제 1. n 이 자연수이고 $a_1, \ldots, a_k$ $(k \geq 2)$는 1 이상이고 n 이하인 서로 다른 자연수들이며 모든 $i = 1, \ldots, k-1$ 에 대하여 $a_i(a_{i+1} - 1)$ 이 n 의 배수라고 한다. 이 때 $a_k(a_1 - 1)$ 은 n 의 배수가 될수 없음을 증명하여라.

문제 2. 삼각형 ABC 의 외심을 O 라고 하고 점 P, Q 는 각각 변 CA, AB 우의 량끝점이 아닌 점이라고 하자. 점 K, L, M 을 각각 선분 BP, CQ, PQ 의 가운데 점이라고 하고 세 점 K, L, M 을 지나는 원을 Γ 라고 하자. 직선 PQ 가 원 Γ 에 접한다고 가정하자. 이 때 $OP = OQ$ 임을 증명하여라.

문제 3. 자연수들로 이루어진 엄격히 증가하는 무한수렬 $s_1, s_2, s_3, \ldots$ 의 두 무한부분수렬

$$s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \ldots \quad \text{과} \quad s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \ldots \quad \text{이}$$

각각 등차수렬이면 수렬 $s_1, s_2, s_3, \ldots$ 도 역시 등차수렬임을 증명하여라.

제한시간: 4 시간 30 분
문제당 7 점

2009 년 7 월 16 일, 목요일

문제 4. 삼각형 ABC 에서 $AB = AC$ 이다. 각 CAB 의 이등분선과 변 BC 의 사귐점을 D 라고 하고 각 ABC 의 이등분선과 변 CA 의 사귐점을 E 라고 하자. 삼각형 ADC 의 내심을 K 라고 하고 $\angle BEK = 45^\circ$ 라고 가정하자. 이 때 $\angle CAB$ 의 가능한 값을 모두 구하여라.

문제 5. 다음의 성질을 가지는 함수 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$(즉 자연수 모임을 자연수 모임으로 넘기는 함수)을 모두 구하여라.

성질; 임의의 자연수 a, b 에 대하여 $a, f(b), f(b + f(a) - 1)$ 를 세 변의 길이로 가지는 불퇴화 삼각형이 존재한다. (여기서 불퇴화 삼각형이란 그의 세 정점이 한 직선 우에 놓이지 않는 삼각형을 말한다.)

문제 6. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 이 서로 다른 자연수들이고 M 은 $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ 을 포함하지 않는 임의의 $n - 1$ 개의 서로 다른 자연수들로 이루어진 모임이다. 메뚜기 한 마리가 수직선 우의 원점 0 에서 시작하여 매번 오른쪽 방향으로 총 n 번의 뜀뛰기를 하는데 뜀뛰기하는 거리들을 순서대로 라렬한 것이 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 의 재배치가 되도록 뜀뛰기한다. 이 메뚜기가 M 의 원소들을 좌표로 가지는 수직선 우의 점들을 하나도 밟지 않고 뜀뛰기를 진행할수 있는 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 의 재배치가 존재함을 증명하여라.

제한시간: 4 시간 30 분
문제당 7 점